

基于 Hammerstein 模型的非线性分离法预测控制

李元明¹, 潘红光², 邹涛³, 钱新华¹

1. 中国石油天然气有限公司抚顺石化分公司, 辽宁 抚顺 113008;
2. 西安科技大学电气与控制工程学院, 陕西 西安 710054;
3. 中国科学院沈阳自动化研究所, 辽宁 沈阳 110016

基金项目: 国家高技术研究发展计划资助项目(22014AA041801); 国家自然科学基金资助项目(61603295)

通信作者: 潘红光, hongguangpan@163.com 收稿/录用/修回: 2016-04-20/2016-07-25/2016-08-23

摘要

采用非线性分离法综合了基于 Hammerstein 模型的稳定预测控制器。首先用有限时域稳定预测控制方法求解期望中间变量, 然后求解非线性代数方程来反算实际控制作用。在求解期望中间变量时考虑输入非线性的不确定性和非线性代数方程的求解误差。在确定有限时域优化问题的终端约束集和终端状态加权矩阵时, 采用参数依赖方法并引入参考集以优化终端约束集。通过一个仿真例子验证了该控制算法。

关键词

Hammerstein 模型
非线性分离法
预测控制
稳定性综合
中图分类号: TP13
文献标识码: A

Nonlinear Separation Predictive Control Based on Hammerstein Model

LI Yuanming¹, PAN Hongguang², ZOU Tao³, QIAN Xinhua¹

1. Fushun Petrochemical Branch, China Petroleum Natural Gas Co. Ltd., Fushun 113008, China;
2. College of Electrical and Control Engineering, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China;
3. Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016, China

Abstract

We synthesize a stable predictive controller based on the Hammerstein model by using the nonlinear separation method. Firstly, we obtain the desired intermediate variable by using the finite-horizon stable predictive control method, and then we obtain the real control action by solving nonlinear algebraic equations. While calculating the desired intermediate variable, we consider the uncertainty in input nonlinearity and the error in solving nonlinear algebraic equations. In determining the terminal constraint set and terminal state weighting matrix for the finite-horizon optimization problem, we utilize the parameter-dependent method and introduce the reference set to optimize the terminal constraint set. The algorithm is validated with a simulation example.

Keywords

Hammerstein model;
nonlinear separation;
predictive control;
stability synthesis

1 引言

近年来,非线性预测控制因其重要性而引起了众多研究者的兴趣,而基于 Hammerstein 模型的预测控制是一个典型代表^[1-4]。文[5-8]采用两步法控制策略求解了 Hammerstein 非线性系统的控制问题。两步法用解方程来分离可逆静态非线性,从而在预测控制律的计算中不再考虑该非线性;并用解饱和方法处理输入饱和约束,从而使得期望中间变量的计算完全成为线性无约束问题。该法可以处理非输入饱和型约束,但在实施时仍存在计算上的困难。

本文用双模控制方法综合基于 Hammerstein 模型的稳定

预测控制算法,同文[5-8]一样,仍先将可逆静态非线性分离。但与两步法不同的是,本文方法将输入约束转化为中间变量约束,在优化求解期望中间变量时就考虑各种约束,包括中间变量约束、状态约束和输出约束等。不同于文[9],本文采用的是文[10]中标准的有限时域稳定预测控制器的设计方法,并考虑非线性方程的求解误差和输入非线性的不确定性,故更接近于工程实际。文[10]方法已在预测控制算法综合中广泛采用,而本文与文[10]的区别在于采用参数李亚普诺夫函数并引入参考集来优化稳定预测控制器中的参数。

符号说明: R^n 为 n 维实空间。对向量 x 和正定矩阵 W , $\|x\|_W = x^T W x$ 。 $x(k+i|k)$ 为在 k 时刻对未来 $k+i$ 时刻

变量 x 的预测值. 矩阵中* 表示位于对称位置的分块.

2 有限时域非线性分离法预测控制

考虑系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\phi(u(k)) \\ \phi(0) &= 0, y(k) = Cx(k) \end{aligned} \tag{1}$$

其输入和状态约束为

$$\begin{aligned} -\underline{u} \leq u(k+i) \leq \bar{u}, \quad i \geq 0 \\ -\underline{g} \leq Gx(k+i+1) \leq \bar{g}, \quad i \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

其中, $x \in R^n, y \in R^p, u \in R^m$, 分别为状态、输出与输入; $\underline{u}: = [\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_m]^T, \bar{u}: = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m]^T, \underline{g} = [\underline{g}_1, \underline{g}_2, \dots, \underline{g}_q]^T, \bar{g} = [\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_q]^T, \underline{u}_i > 0, \bar{u}_i > 0, i = 1, 2, \dots, m, \underline{g}_j > 0, \bar{g}_j > 0, j = 1, 2, \dots, q; G \in R^{q \times n}$; 输出约束 $-\underline{y} \leq y(k+i+1) \leq \bar{y}, i \geq 0$ 可表示成式(3)的形式, 其中 $G = C$, 向量 \underline{y}, \bar{y} 的元素要求为正; 向量的比较是指逐元素比较. 假设系统状态完全可测量且系统可镇定; 并假设非线性 ϕ 包含 Hammerstein 模型的可逆静态对角解耦非线性环节 $f = [f_1, f_2, \dots, f_m]^T$ 和输入静态不确定性. 式(2)和式(3)还可表示为 $u \in U \subset R^m$ 和 $x \in X \subset R^n$.

用多包描述表示输入静态不确定性, 将系统(1)记为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + BH(k)v(k) \\ y(k) &= Cx(k) \\ v(k) &= f(u(k)) \end{aligned} \tag{4}$$

其中, $v \in R^m$ 为中间变量, $f(0) = 0$.

$$H(k+i) = \sum_{l=1}^L \omega_l(k+i) H_l, \quad i \geq 0 \tag{5}$$

H_l 为多包顶点, $\omega_l(k+i)$ 为描述不确定性的参数, 只需满足:

$$\sum_{l=1}^L \omega_l(k+i) = 1, \quad \omega_l(k+i) \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots, L \tag{6}$$

在非线性分离法预测控制中, 首先针对线性模型采用预测控制策略得到期望的中间变量, 然后通过求解非线性代数方程得到实际控制作用. 下面具体给出相应的算法, 当求解期望中间变量时考虑非线性方程的求解误差.

2.1 期望中间变量的计算

类似于文[9], 将对 u 的约束 $u \in U$ 转化为对 v 的约束 $v \in V$. 由于非线性环节是对角解耦的, $v \in V$ 为线性约束. 同文[12], 定义 $v(k+i|k) = Fx(k+i|k) + \bar{v}(k+i|k), i = 0, \dots, N-1$, 其中 F 的详细确定见第3小节. 计算期望中间变量时不考虑 f , 而是求解如下的有限时域优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{v}(k)} \max_{H^0(k), H(k+1), \dots, H(k+N-1)} J(k) \\ = \sum_{i=0}^{N-1} (\|x(k+i+1|k)\|_Q^2 + \|v(k+i+1|k)\|_R^2) + \\ \|x(k+N|k)\|_{Q_N}^2 \end{aligned} \tag{7a}$$

$$\text{s.t. } x(k+1|k) = A^0(k)x(k) + BH^0(k)v(k|k) \tag{7b}$$

$$x(k+i+1|k) = A(k+i)x(k+i|k) + BH(k+i) \cdot \bar{v}(k+i|k), \quad i = 1, \dots, N-1 \tag{7c}$$

$$A^0(k) = A + BH^0(k)F \tag{7d}$$

$$A(k+i) = A + BH(k+i)F \tag{7e}$$

$$v(k+j|k) \in V, \quad x(k+j+1|k) \in X, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$x(k+N|k) \in X_f \tag{7e}$$

其中, Q, R, Q_N 为对称正定的加权矩阵, X_f 为终端约束集; Q_N 和 X_f 的详细确定放在第3小节; $H^0(k)$ 为综合考虑 $H(k)$ 和非线性方程求解误差后的不确定性表示, 但如何考虑方程求解误差将在下文说明; $\bar{v}(k) = [\bar{v}^T(k|k), \dots, \bar{v}^T(k+N-1|k)]^T$ 为优化问题的决策变量. 在每个时刻 k , 求解优化问题(7), 并实施 $v(k) = Fx(k) + \bar{v}(k|k)$.

考虑到状态预测量和模型不确定性, 还需将问题(7)转化为可以直接求解的形式. 记 $\tilde{x}(k+1) = [x^T(k+1|k), \dots, x^T(k+N-1|k)]^T$ 和 $\tilde{X}(k) = [x^T(k), \tilde{x}^T(k+1)]^T$, 则参考文[13]可简记为

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}(k)x(k) + \tilde{B}(k)\tilde{v}(k) \tag{8}$$

$$x(k+N|k) = \tilde{A}_N x(k) + \tilde{B}_N(k)\tilde{v}(k) \tag{9}$$

其中, $\tilde{A}(k), \tilde{A}_N(k), \tilde{B}(k), \tilde{B}_N(k)$ 为相应维数的矩阵. 另外, 记 $\tilde{v}(k) = [v^T(k|k), \dots, v^T(k+N-1|k)]^T$, 则:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(k) &= [x^T(k)F^T, x^T(k+1|k)F^T, \dots, \\ & x^T(k+N-1|k)F^T]^T + \tilde{v}(k) \\ &= \tilde{F}\tilde{X}(k) + \tilde{v}(k) \end{aligned} \tag{10}$$

其中, \tilde{F} 是由 F 适当构成的. 根据式(7a)和式(8)~式(10)可得

$$\begin{aligned} J(k) &= \|x(k)\|_Q^2 + \|\tilde{A}(k)x(k) + \tilde{B}(k)\tilde{v}(k)\|_Q^2 + \\ & \|\tilde{F}[x^T(k), (\tilde{A}(k)x(k) + \tilde{B}(k)\tilde{v}(k))]^T + \\ & \tilde{v}(k)\|_R^2 + \|\tilde{A}_N x(k) + \tilde{B}_N(k)\tilde{v}(k)\|_{Q_N}^2 \end{aligned} \tag{11}$$

其中, \tilde{R}, \tilde{Q} 分别为由 R, Q 构成的对角分块矩阵. 令:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\geq \|\tilde{A}(k)x(k) + \tilde{B}(k)\tilde{v}(k)\|_Q^2 + \\ & \|\tilde{F}[x^T(k), (\tilde{A}(k)x(k) + \tilde{B}(k)\tilde{v}(k))]^T + \\ & \tilde{v}(k)\|_R^2 \end{aligned} \tag{12a}$$

$$\gamma_2 \geq \|\tilde{A}_N x(k) + \tilde{B}_N(k)\tilde{v}(k)\|_{Q_N}^2 \tag{12b}$$

考虑式(11)、式(12), 优化问题(7)可重写为

$$\begin{aligned} \min_{\gamma_1, \gamma_2, \tilde{v}(k)} \max_{\tilde{A}(k), \tilde{B}(k), \tilde{A}_N(k), \tilde{B}_N(k)} \|x(k)\|_Q^2 + \gamma_1 + \gamma_2 \\ \text{s.t. 式(7e), 式(12)} \end{aligned} \tag{13}$$

为进一步考虑式(7e)和式(12), 需要定义新的多包描述. 首先, 依赖式(5)、式(6)和式(7d), $[\tilde{A}(k) | \tilde{B}(k)]$ 可转化为多包:

$$\begin{aligned} [\tilde{A}(k) | \tilde{B}(k)] &= \sum_{\tilde{l}=1}^{\tilde{L}} \xi_{\tilde{l}} [\tilde{A}_{\tilde{l}} | \tilde{B}_{\tilde{l}}], \\ \sum_{\tilde{l}=1}^{\tilde{L}} \xi_{\tilde{l}} &= 1, \quad \xi_{\tilde{l}} \geq 0 \end{aligned} \tag{14}$$

其中, $[\tilde{A}_{\tilde{l}} | \tilde{B}_{\tilde{l}}]$ 为多包的第 \tilde{l} 个顶点, $\tilde{L} \leq 2^m L^{N-1}$; 类似地, $[\tilde{A}_N(k) | \tilde{B}_N(k)]$ 可以转化为多包:

$$[\tilde{A}_N(k) \mid \tilde{B}_N(k)] = \sum_{\tilde{l}_N=1}^{\tilde{l}_N} \theta_{\tilde{l}_N} [\tilde{A}_{N,\tilde{l}_N} \mid \tilde{B}_{N,\tilde{l}_N}],$$

$$\sum_{\tilde{l}_N=1}^{\tilde{l}_N} \theta_{\tilde{l}_N}, \theta_{\tilde{l}_N} \geq 0 \quad (15)$$

其中, $[\tilde{A}_{N,\tilde{l}_N} \mid \tilde{B}_{N,\tilde{l}_N}]$ 为多包的第 \tilde{l}_N 个顶点, $\tilde{l}_N \leq 2^m L^N$.

根据式(14), 式(12a) 可以转化为

$$\gamma_1 \geq \|\tilde{A}_{\tilde{l}} x(k) + \tilde{B}_{\tilde{l}} \tilde{v}(k)\|_{Q_0}^2 +$$

$$\|\tilde{F} [x(k)^T, (\tilde{A}_{\tilde{l}} x(k) + \tilde{B}_{\tilde{l}} \tilde{v}(k))^T]^T + \tilde{v}(k)\|_{R}^2,$$

$$\tilde{l} = 1, 2, \dots, \tilde{L} \quad (16a)$$

类似地, 根据式(15), 式(12b) 可以转化为

$$\gamma_2 \geq \|\tilde{A}_{N,\tilde{l}_N} x(k) + \tilde{B}_{N,\tilde{l}_N} \tilde{v}(k)\|_{Q_N}^2,$$

$$\tilde{l}_N = 1, 2, \dots, \tilde{L}_N \quad (16b)$$

另外当 X_f 是凸集时, 根据式(15), 终端约束 $x(k + N|k) \in X_f$ 可以转化为

$$\tilde{A}_{N,\tilde{l}_N} x(k) + \tilde{B}_{N,\tilde{l}_N} \tilde{v}(k) \in X_f, \quad \tilde{l}_N = 1, 2, \dots, \tilde{L}_N \quad (17)$$

而式(7e) 中的中间变量和状态约束可由下面的式子保证:

$$\tilde{F} [x^T(k), (\tilde{A}_{\tilde{l}} x(k) + \tilde{B}_{\tilde{l}} \tilde{v}(k))^T]^T + \tilde{v}(k)$$

$$\in V^N, \quad V^N = V \times V \times \dots \times V, \quad \tilde{l} = 1, 2, \dots, \tilde{L} \quad (18)$$

$$-\tilde{g} \leq \tilde{G} [\tilde{A}_{\tilde{l}} x(k) + \tilde{B}_{\tilde{l}} \tilde{v}(k)] \leq \tilde{g},$$

$$\tilde{l} = 1, 2, \dots, \tilde{L} \quad (19a)$$

$$-\underline{g} \leq G [\tilde{A}_{N,\tilde{l}_N} x(k) + \tilde{B}_{N,\tilde{l}_N} \tilde{v}(k)] \leq \bar{g},$$

$$\tilde{l}_N = 1, 2, \dots, \tilde{L}_N \quad (19b)$$

其中, \tilde{g} 和 \underline{g} 为由 \underline{g} 和 \bar{g} 适当构成的向量, \tilde{G} 是由 G 适当构造的矩阵.

这样, 优化问题(7) 最终转化为可直接求解的形式:

$$\min_{\gamma_1, \gamma_2, \tilde{v}(k)} \|x(k)\|_{Q_0}^2 + \gamma_1 + \gamma_2$$

s.t. 式(16) ~ 式(19) (20)

式(16)、式(18) 和式(19) 都可转化为 LMI (linear matrix inequality); 若 X_f 是多包集或椭圆集, 约束(17) 也可以转化为 LMI, 从而可将问题(20) 转化为 LMI 求解^[13]. 注意由式(20) 得到的 $v(k)$ 可能因为方程求解不准确而得不到实现, 故表示为 $v^l(k) = \kappa(x(k))$, 此即为期望中间变量.

2.2 实际控制作用的求解

根据 $v^l(k) - f(u(k)) = 0$, 可由 $v^l(k)$ 求解 $u(k)$, 形式地记为

$$u(k) = g(v^l(k)) \quad (21)$$

特令求解过程满足:

$$-\underline{u} \leq u(k) \leq \bar{u} \quad (22a)$$

$$b_{i1}^2(v_i^l(k)) \leq f_i(u(k)) v_i^l(k) \leq b_{i2}^2(v_i^l(k)),$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad (22b)$$

其中, $b_{i2} \geq 1$ 和 $b_{i1} \in (0, 1]$ 为定义方程求解误差的标量. 由于上文将对输入的约束转化为对中间变量的约束, 所以满足式(22) 的解总是存在的. 由式(4) 和式(21) 得到

$$v(k) = f(u(k)) = (f \circ g)(v^l(k)) = h(v^l(k)) \quad (23)$$

则由中间变量表示的控制律为

$$v(k) = h(\kappa(x(k))) \quad (24)$$

其中, $\kappa(\cdot)$ 为中间量. 由于 $h(\cdot)$ 主要体现了方程求解误差, 故可将其看作一种不确定性, 则 $h(\cdot)$ 必包含于如下的多包:

$$h(\vartheta) = \sum_{l_h=1}^{2m} \zeta_{l_h} H_{l_h}^h \vartheta, \quad \sum_{l_h=1}^{2m} \zeta_{l_h} = 1, \zeta_{l_h} \geq 0 \quad (25)$$

其中, 对角阵 $H_{l_h}^h$ 为多包的第 l_h 个顶点, 其第 i 个对角元为 b_{i2} 或 b_{i1} , $i = 1, 2, \dots, m$. 如, 若 $m = 2$, 则 $H_1^h = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{21} \end{bmatrix}$,

$$H_2^h = \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{21} \end{bmatrix}, H_3^h = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}, H_4^h = \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}.$$

现在, 令:

$$H^0(k) = \sum_{l_h=1}^{2m} \zeta_{l_h} H(k) H_{l_h}^h, \quad \sum_{l_h=1}^{2m} \zeta_{l_h} = 1, \zeta_{l_h} \geq 0 \quad (26)$$

此即为式(7e) 中的 $H^0(k)$, 故 $H^0(k)$ 中考虑了方程求解误差.

注1 在文[11]中, 要利用 f^{-1} 并直接将 $u = f^{-1}(v)$ 转化为多包描述, 而本文则采用了解方程的方法来直接处理 $v = f(u)$. 因此, 本文方法不仅不需要 f^{-1} , 而且针对求解误差的多包描述(25) 要更容易处理得多.

注2 在文[11]中, 将非线性转化成多包描述后, 采用了 N 个确定性的自由中间变量 $v(k + i|k)$, $0 \leq i \leq N - 1$. 假设用文[11]的方法处理本文的系统(1) ~ (4), 则由于处理的是多包描述模型, 这些确定性的中间变量必须针对所有顶点. 因此, N 增大后, 不一定能改进可行域(使优化问题可解的初始状态所在的区域), 甚至可能会减小可行域. 在非线性分离法(7) 中, 采用了部分反馈型的中间变量 $v(k + i|k) = Fx(k + i|k) + \tilde{v}(k + i|k)$. 由于反馈作用的存在, 使得该方法可以克服由于多包描述引起的不确定性的影响. 根据文[14]的原理, 采用式(7) 后, 增大 N 一般可改进可行域.

通过合理设计 Q_N 和 X_f 可使基于式(20) ~ 式(22) 的预测控制系统闭环稳定, 下一节对此详细讨论.

3 终端约束集和终端状态加权矩阵的确定

由于要设计稳定的有限时域预测控制器, 故应确定:

- ① 终端约束集 X_f ;
 - ② 局部控制器 F ;
 - ③ 终端加权矩阵 Q_N .
- 文[10]指出① ~ ③ 为标准的有限时域稳定预测控制器的3个要素(当3个要素满足若干条件时闭环系统稳定), 并给出了引理1 中的4个基本条件的一般表达. 本文则针对非线性分离法预测控制给出具体的稳定条件, 并用它们讨论闭环稳定性, 引理如下:

引理1 假设 $\{X_f, F, Q_N\}$ 满足条件:

$$(C1) Fx(k + i|k) \in V, \forall x(k + i|k) \in X_f, \forall i \geq N;$$

(C2) $(A + BH(k+i)F)x(k+i|k) \in X, \forall x(k+i|k) \in X_f, \forall i \geq N;$

(C3) $(A + BH(k+i)F)x(k+i|k) \in X_f, \forall x(k+i|k) \in X_f, \forall i \geq N;$

(C4) $Q_N \geq Q + F^T R F + (A + BH(k+i)F)^T \cdot Q_N (A + BH(k+i)F), \forall i \geq N.$

如果在 $k=0$ 时刻式(20)有可行解,则基于式(20)~式(22)的非线性分离法预测控制系统闭环指数稳定.

证明 该结论已经在文献中得到应用,如文[10-13],此处略.(证毕)

进一步讨论如何确定满足条件(C1)~(C4)的 $\{X_f, F, Q_N\}$.

3.1 稳定条件的 LMI 转化

为了以一种容易计算的形式满足(C1)~(C4),假设:

$$V = \{v | -\underline{\psi} \leq \Psi v \leq \bar{\psi}\} \quad (27)$$

其中 Ψ 为适当维数的矩阵, $\underline{\psi} = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M]^T, \bar{\psi} = [\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_M]^T, \psi_i > 0, \bar{\psi}_i > 0, \forall i = 1, \dots, M$, 而 M 为表示 V 所用的双边不等式的个数. 进一步记 $\psi_i = \min\{\underline{\psi}_i, \bar{\psi}_i\}, i = 1, 2, \dots, M$ 和 $\Phi^{-1} = \text{diag}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M\}$, 则:

$$\Omega_v = \{v | -\mathbf{1} \leq \Phi \Psi v \leq \mathbf{1}\} \subseteq V \quad (28)$$

其中 $\mathbf{1}$ 为元素为 1 的向量. 现在, 如果满足:

$$F x \in \Omega_v, \forall x \in X_f \quad (29)$$

则条件(C1)也满足.

下面结论可用于确定满足条件(29)和(C2)~(C3)的 F 和 X_f .

定理 1 假设存在矩阵 $\{X, Y\}$ 和对称正定矩阵 $\{Z, \Gamma, Q_l = P_l^{-1}, l = 1, 2, \dots, L\}$ 满足:

$$\begin{bmatrix} X + X^T - Q_l & (AX + BH_l Y)^T \\ AX + BH_l Y & Q_l \end{bmatrix} > 0, \quad l, l = 1, 2, \dots, L \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} Z & \Phi \Psi Y \\ Y^T \Psi^T \Phi & X + X^T - Q_l \end{bmatrix} \geq 0, \quad (31)$$

$$Z_{jj} \leq 1, j = 1, 2, \dots, m, l = 1, 2, \dots, L \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} X + X^T - Q_l & (AX + BH_l Y)^T G^T \\ G(AX + BH_l Y) & \Gamma \end{bmatrix} \geq 0, \quad (32)$$

$$\Gamma_{ss} \leq g_{s, \text{inf}}^2, s = 1, 2, \dots, q, l = 1, 2, \dots, L \quad (32)$$

其中 $g_{s, \text{inf}} = \min\{g_s, \bar{g}_s\}, Z_{jj}(\Gamma_{ss})$ 为 $Z(\Gamma)$ 的第 $j(s)$ 个对角元素. 取:

$$F = YX^{-1} \quad (33)$$

$$X_f = \varepsilon_{\Sigma} = \{\xi \in R^n | \xi^T Q_l^{-1} \xi \leq 1, l = 1, 2, \dots, L\}$$

可满足条件(C1)~(C3).

证明 这种稳定性方法首先来源于文[15], 被文[16]首先用于预测控制, 而文[21]又进行了离线设计. 此处略. 证毕.

另外, 条件(C4)满足的充要条件为

$$Q_N \geq Q + F^T R F + (A + BH_l F)^T Q_N (A + BH_l F), \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (34)$$

定义 $\Xi = Q_N^{-1}$ 和 $Y = FX$, 则仿照文[17]可以将式(34)转化为 LMI:

$$\begin{bmatrix} X + X^T - \Xi & (AX + BH_l Y)^T & (Q^{1/2} X)^T & (R^{1/2} Y)^T \\ (AX + BH_l Y) & \Xi & 0 & 0 \\ Q^{1/2} X & 0 & I & 0 \\ R^{1/2} Y & 0 & 0 & I \end{bmatrix} > 0, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (35)$$

综合定理 1 和式(35), 本文提出以下可用于综合计算的条件:

条件 A 存在满足式(30)~式(32)的矩阵 $Q_l, \Xi, Y, X, Z, \Gamma$.

易知若条件 A 满足, 则存在适当的 Q_N, X_f 和 F 使条件(C1)~(C4)得到满足, 故由引理 1 可得:

定理 2 假设 $Q_N = \Xi^{-1}$ 和 $X_f = \varepsilon_{\Sigma}$ 满足条件 A. 如果在 $k=0$ 时刻式(20)有可行解, 则基于式(20)~式(22)的非线性分离法预测控制系统闭环指数稳定.

证明 参考文[12]可证, 此处略. 证毕.

3.2 终端约束集的优化和稳定要素的确定

满足条件 A 后, 取终端约束集为 $X_f = \varepsilon_{\Sigma}$. 选择 X_R 为参考集, 推广文[18]的方法, 可以在某种程度上最大化 X_f , 通过附加以下条件做到:

$$\alpha X_R \subseteq \varepsilon_{\Sigma}, \alpha > 0 \quad (36)$$

最大化 α , 则 X_f 相对于 X_R 也是最大的.

假设 X_R 为一个椭圆集, 即 $X_R = \{x \in R^n | x^T R_r x \leq 1\}$, 其中权重矩阵 $R_r > 0$, 则式(36)等价于

$$\alpha^2 P_l \leq R_r, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (37)$$

令 $\beta = \frac{1}{\alpha^2}$, 则可通过优化问题(38)最大化 X_f :

$$\begin{aligned} & \min_{Q_l, \Xi, Y, X, Z, \Gamma, \beta} \beta \\ & \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} \beta R_r & I \\ I & Q_l \end{bmatrix} \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots, L \text{ 和条件 A} \end{aligned} \quad (38)$$

假设 X_R 为多包集, 即 $X_R = \text{co}\{e_{r1}, e_{r2}, \dots, e_{rp}\}$, 其中 $e_{ri} \in R^n, i = 1, 2, \dots, p$, 则式(36)等价于:

$$\alpha^2 e_{ri}^T P_l e_{ri} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, p, l = 1, 2, \dots, L \quad (39)$$

令 $\beta = \frac{1}{\alpha^2}$, 则可通过优化问题(40)最大化 X_f :

$$\begin{aligned} & \min_{Q_l, \Xi, Y, X, Z, \Gamma, \beta} \beta \\ & \text{s.t.} \quad \text{条件 A} \\ & \quad \begin{bmatrix} \beta & e_{ri}^T \\ e_{ri} & Q_l \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, l = 1, 2, \dots, L \end{aligned} \quad (40)$$

求解式(38)或式(40)后, 令 $\Xi = Q_N^{-1}$ 并用式(33)确定 F 和 X_f 即得到稳定的 3 要素. 这样对应的优化问题(20)可用 LMI 工具求解. LMI 优化问题常用内点法求解, 其计算时间与 $k^3 L$ 成正比, 其中 k 为标量 LMI 变量的个数, L 为 LMI 的总行数(见文[19]). 对本文方法, $k = 2 + Nm, L = (n + 1)2^m L^{N+1} + (n + 2q + 1)2^m L^N + (Nn - n + Nm + 2q + 2M + 1)2^m L^{N-1} + 2(q + M) \sum_{l=1}^{N-2} 2^m L^l + 2M$; 用文[11]方法控制式(1)~式(4)时, $k = 2 + Nm + \frac{1}{2}n(n + 1) + Nm + \frac{1}{2}n(n + 1) + nm + \frac{1}{2}m(m + 1) + \frac{1}{2}q(q + 1), L = (n +$

$2q + 1)(L_0L)^N + (Nn - n + Nm + 2q + 1)(L_0L)^{N-1} + 2q \sum_{i=2}^{N-2} (L_0L)^i + (4n + m + 3q)L_0L + 2NM + n + m + q$, 其中 L_0 是将 f^{-1} 转化为多包描述时所涉及的顶点数. 注意在这些 L 的计算结果中, 已经去除了一些冗余的行. 另外, 只可用 k^3L 做近似比较, 因为: (a) 文[11]方法采用迭代的方式以增强最优性(见其 2.7 节: Reducing conservatism), 使得计算量明显增加; (b) 文[11]考虑了减少 LMI 数量的方法(见其 2.5 节), 将使得计算量降低; (c) 本文方法要求解非线性方程(但是不要求精确求解), 将使计算量稍有增加.

4 仿真验证

4.1 计算示例

考虑实际工程中经常遇到的双积分系统, 即 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. 令 $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = [0 \ 1]$, $H_1 = 0.7$ 和 $H_2 = 1.3$. 约束为 $|y(i+1)| \leq 1$ 和 $|u(i)| \leq 1, \forall i \geq 0$. 输入可逆非线性为 $v = 0.5u^3 + 0.5u$, 故对 v 的约束容易确定为 $|v| \leq 1$. $M = 1, \Phi = \Psi = 1$.

选择 $R_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 即 X_R 为单位圆. 求解式(38)得到 $\alpha = 0.6644, P_1 = \begin{bmatrix} 1.7723 & 0.7359 \\ 0.7359 & 1.1679 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1.7756 & 0.7136 \\ 0.7136 & 1.2084 \end{bmatrix}, Q_N = \begin{bmatrix} 4.7508 & 1.9588 \\ 1.9588 & 1.6636 \end{bmatrix}$ 和 $F = [-1.2937 \ -0.3941]$. 选择 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1$.

为了验证分离法, 选择 $b_{11} = 0.9$ 和 $b_{12} = 1.1$, 则 $L_h = 2, H_1^h = 0.9, H_2^h = 1.1$. 尽管可以准确求解方程, 但是这里仅寻找可行解, 以验证系统稳定性. 选择 $N = 4$, 初始状态 $x(0) = [-0.78, 1.65]$ 和 $H(k+i) = 1 + 0.3\sin(k+i)$. 图 1 中实线为闭环系统的状态轨迹, 系统稳定.

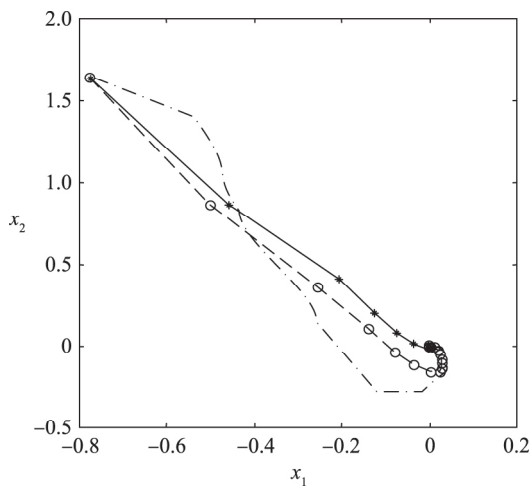


图1 双积分系统的闭环状态轨迹
Fig.1 Closed-loop state trajectories of the double-integrated system

为了与文[11]方法比较, 参数选择同上, 但是初始状态为 $x(0) = [-0.78\vartheta, 1.65]$, 其中 ϑ 待定. 对本文的非线性分离法, 当 $\vartheta \leq 1.97$ 时都存在可行解; 但对文[11]方法, 当 $\vartheta \leq 1.59$ 时才存在可行解. 而且, 与文[11]相比, 本文方法的在线计算量非常低(本文不用在线确定 3 要素). 进一步, 对非线性分离法, 如果准确求解方程($b_{11} = b_{12} = 1$), 则当 $\vartheta \leq 2.02$ 时都存在可行解. 这进一步说明非线性分离法(7)对可行性是非常有利的. 在图 1 中, 同时用虚线画出了 $\vartheta = 1$ 时采用文[11]方法得到的状态轨迹, 可见采用本文方法状态更快地收敛到原点. 另外, 采用基于非线性模型的一般方法, 即将 Hammerstein 模型的静态非线性和动态线性环节合并成一个动态非线性模型并实施预测控制, 结果见图 1 中点划线所示. 相比较而言, 本文方法效果更好.

4.2 提升管反应器模型的控制

文[20]研究催化裂化提升管反应器的非线性预测控制, 采用了 Hammerstein 模型. 线性部分对应的状态空间模型为 $A = \begin{bmatrix} 1.752 & 1 & -0.840 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, BH(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $C = [0.0496 \ 0]$. 可逆静态非线性为 $v = 0.00914u^3 + 0.0373u^2 + 0.1801u$ (注意这里为了去掉文[20]中的偏置项 -0.0052 , 已对非线性进行了变换). 考虑约束为 $|y(i+1)| \leq 1$ 和 $|u(i)| \leq 1, \forall i \geq 0$. 选择 X_R 为单位圆, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1, b_{11} = 0.9, b_{12} = 1.1, N = 4, x(0) = [1, 1]$. 分别采用本文方法和文[11]方法, 闭环状态轨迹如图 2 实线和虚线所示. 显然, 采用本文方法后, 状态响应速度要快一些.

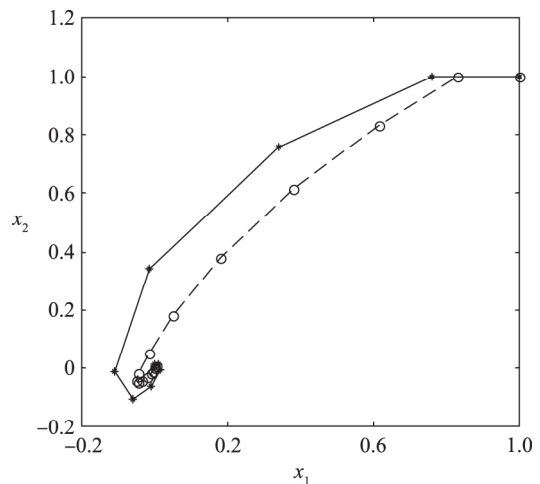


图2 提升管反应器模型的闭环状态轨迹
Fig.2 Closed-loop state trajectories of the riser reactor model

5 小结

本文综合了基于 Hammerstein 模型的非线性分离法稳定预测控制器, 由非线性方程求解误差造成的在闭环系统中的滞留非线性项被转化为多包描述, 同时考虑了静态不确定性. 同文[11]相比, 由于没有将输入非线性本身(或其逆)转化为多包描述, 故本文方法可行性一般要强一些.

实际上,如果 $b_{i1} = b_{i2} = 1$ 、非线性方程求解准确且 $u \in U$ 到 $v \in V$ 的约束转换准确,则非线性分离法本身不会降低原始问题的可行性。

从计算量上讲,本文方法计算量小于文[11]方法而大

于文[5-8]的两步法。本文方法统一地处理模型不确定性和方程求解误差,得到的控制器具有稳定性保证,并在优化中考虑各种实际约束,从而可得到更优的控制效果,这些是两步法所不具备的。

参考文献

- [1] Faulwasser T, Findeisen R. Nonlinear model predictive control for constrained output path following[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 61(4): 1026-1039.
- [2] Käpernick B, Graichen K. Nonlinear model predictive control based on constraint transformation[J]. Optimal Control Applications & Methods, 2015, <http://dx.doi.org/10.1002/oca.2215>.
- [3] Lucia S, Paulen R, Engell S. Multi-stage nonlinear model predictive control with verified robust constraint satisfaction[C]//53rd IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2015: 2816-2821.
- [4] Grancharova A, Johansen T A. Approaches to explicit nonlinear model predictive control with reduced partition complexity[C]//European Control Conference. Berlin, Germany: Springer, 2015: 2414-2419.
- [5] Ding B C, Li S Y, Xi Y G. Stability analysis of generalized predictive control with input nonlinearity based-on Popov's theorem[J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(4): 582-588.
- [6] Ding B C, Xi Y G, Li S Y. Stability analysis on predictive control of discrete-time systems with input nonlinearity[J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(6): 827-834.
- [7] Ding B C, Xi Y G. A two-step predictive control design for input saturated Hammerstein systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2006, 16: 353-367.
- [8] Ding B C, Xi Y G, Li S Y. On the stability of output feedback predictive control for systems with input nonlinearity[J]. Asian Journal of Control, 2004, 6(3): 388-397.
- [9] Fruzzetti K P, Palazoglu A, McDonald K A. Nonlinear model predictive control using Hammerstein models[J]. Journal of Process Control, 1997, 7(1): 31-41.
- [10] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. Automatica, 2000, 36(5): 789-814.
- [11] Bloemen H H J, van de Boom T J J, et al. Model-based predictive control for Hammerstein-Wiener systems[J]. International Journal of Control, 2001, 74(5): 482-495.
- [12] Schuurmans J, Rossiter J A. Robust predictive control using tight sets of predicted states[J]. IEE Proceedings, Part D, 2000, 17: 13-18.
- [13] Ding B C, Xi Y G, Li S Y. A synthesis approach of on-line constrained robust model predictive control[J]. Automatica, 2004, 40(1): 163-167.
- [14] Kouvaritakis B, Rossiter J A, Schuurmans J. Efficient robust predictive control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(8): 1545-1549.
- [15] Daafouz J, Bernussou J. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parameter uncertainties[J]. Systems and Control Letters, 2001, 43: 355-359.
- [16] Mao W J. Robust stabilization of uncertain time-varying discrete systems and comments on "an improved approach for constrained robust model predictive control" [J]. Automatica, 2003, 39(7): 1109-1112.
- [17] Kothare M V, Balakrishnan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. Automatica, 1996, 32(8): 1361-1379.
- [18] Hu T S, Lin Z L. On enlarging the basin of attraction for linear systems under saturated linear feedback[J]. Systems and Control Letters, 2000, 40(1): 59-69.
- [19] Gahinet P, Nemirovski A, Laub A J, et al. LMI control toolbox for use with matlab, user's guide[M]. Natick, MA, USA: The Math Works Inc, 1995.
- [20] Tian X M, Fu D B. Nonlinear model predictive controller for the riser reactor of a FCC unit[C]//Proceedings of the World Congress on Intelligent and Automation. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2004: 3344-3347.
- [21] 丁宝苍, 杨鹏, 孙鹤旭, 等. 离线鲁棒预测控制器综合方法的改进方案[J]. 控制与决策, 2005, 20(3): 312-315, 320.
Ding B C, Sun P, Sun H X, et al. Improved off-line synthesis approach of robust model predictive control[J]. Control and Decision, 2005, 20(3): 312-315, 320.

作者简介

李元明(1979-),男,硕士,高级工程师。研究领域为石油化工。

潘红光(1983-),男,博士,讲师。研究领域为预测控制。

邹涛(1975-),男,博士,副研究员。研究领域为预测控制。